Gabriella Campo

Manuale di Matematica

per studenti DSA (....e non solo)

FORMULE, MAPPE ED ESERCIZI RISOLTI

Esponenziali

Logaritmi

Goniometria

Trigonometria

Calcolo Combinatorio

Calcolo delle Probabilità

BOOK SPRINT EDIZIONI

www.booksprintedizioni.it

INTRODUZIONE

I ragazzi discalculici in Italia sono ormai il 3-5% della popolazione scolastica. La loro maggiore difficoltà è la memorizzazione delle formule e l'automatizzazione dei procedimenti algebrici che impediscono di acquisire tecniche di calcolo veloci. Lavorando da alcuni anni con studenti DSA ho deciso di scrivere questo manuale per aiutarli ad esprimere comunque le loro potenzialità e favorirne il raggiungimento del successo formativo.

Alla luce delle difficoltà che può avere uno studente dislessico e/o discalculico, questo manuale è ricco di mappe concettuali, esercizi risolti, spiegazioni dettagliate scritte in maiuscolo e con parole semplici, formule accompagnate da illustrazioni e tabelle oltre che da continui rimandi che collegano tra di loro i diversi argomenti e che consentono allo studente di inquadrarli correttamente nel programma di studio.

In allegato numerose tabelle e schemi che gli studenti discalculici possono utilizzare durante le verifiche.

1 ESPONENZIALI

1.1 PROPRIETÀ DELLE POTENZE A ESPONENTE REALE

Sia a un numero reale positivo

1) $a^0 = 1$	2) $a^1 = a$	3) $a^x : a^y = a^{x-y}$
4) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	5) $(a^x)^y = a^{xy}$	6) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
7) $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	8) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	9) $\sqrt[y]{a^x} = a^{\frac{x}{y}}$
10) $\frac{1}{\sqrt[y]{a^x}} = a^{-\frac{x}{y}}$		

1.2 ALCUNI TIPI DI EQUAZIONI ESPONENZIALI E LORO RISOLUZIONE

Si definisce equazione esponenziale un'equazione in cui l'incognita compare come esponente di una potenza.

Importante:
Tutte le equazioni esponenziali del tipo $\boldsymbol{a^x = numero\ negativo}$ oppure $\boldsymbol{a^x = 0}$ sono **impossibili.**

1) EQUAZIONI IN CUI SI POSSONO EGUAGLIARE LE BASI APPLICANDO LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE

$$81 \cdot 9^x = 9^{\frac{15}{x}}$$

APPLICANDO LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE (§ 1.1) TRASFORMIAMO TUTTO NELLA STESSA BASE AD ESEMPIO 3

$$3^4 \cdot 3^{2x} = 3^{\frac{30}{x}}$$

APPLICHIAMO LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE IN MODO TALE DA AVERE UN'UNICA POTENZA A SINISTRA E A DESTRA, IN QUESTO CASO BISOGNA APPLICARE LA PROPRIETÀ 4 A SINISTRA

$$3^{4+2x} = 3^{\frac{30}{x}}$$

DUE POTENZE CON LA STESSA BASE SONO UGUALI SE LO SONO ANCHE GLI ESPONENTI, QUINDI "PASSIAMO" AGLI ESPONENTI

$$4 + 2x = \frac{30}{x}$$

A QUESTO PUNTO SI TRATTA SOLO DI CALCOLI ALGEBRICI

$$2x^2 + 4x - 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$(x+5)(x-3) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = -5} \quad \boldsymbol{x_2 = 3}.$$

2) EQUAZIONI IN CUI PRIMA DI EGUAGLIARE LE BASI BISOGNA FARE DEI RACCOGLIMENTI

$$2^{x-1} + 2^{x+1} - 2^{x-4} = \frac{39}{8} \cdot \sqrt[3]{4}$$

APPLICHIAMO LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE, IN QUESTO CASO LE PROPRIETÀ 3, 4 E 9

$$2^x \cdot 2^{-1} + 2^x \cdot 2^1 - 2^x \cdot 2^{-4} = \frac{39}{8} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$$

RACCOGLIAMO 2^x

$$2^x \cdot (2^{-1} + 2^1 - 2^{-4}) = \frac{39}{8} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$$

APPLICHIAMO LA PROPRIETÀ 8

$$2^x \cdot \left(\frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{16}\right) = \frac{39}{8} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$$

A QUESTO PUNTO SI TRATTA SOLO DI CALCOLI ALGEBRICI

$$2^x \cdot \frac{39}{16} = \frac{39}{8} \cdot 2^{\frac{2}{3}} \quad => \quad 2^x \cdot \frac{39}{16} \cdot \frac{16}{39} = \frac{39}{8} \cdot \frac{16}{39} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$$

$$=> \quad 2^x = 2 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \quad => \quad 2^x = 2^{1+\frac{2}{3}} \quad => \quad \mathbf{x} = \mathbf{\frac{5}{3}}$$

3) EQUAZIONI IN CUI COMPAIONO BASI DIVERSE MA STESSO ESPONENTE

1 METODO: SEPARARE IN MODO OPPORTUNO LE BASI IN MODO TALE DA AVERE LO STESSO ESPONENTE

$$3^x \cdot 4^{2x-1} = \frac{1}{3^{x-1}}$$ (DIVIDIAMO PER 3^x)

$$4^{2x-1} = \frac{1}{3^x \cdot 3^{x-1}}$$

$$4^{2x-1} = \frac{1}{3^{2x-1}}$$

$$4^{2x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1}$$

ESSENDO LE BASI DIVERSE, DUE ESPONENZIALI CON BASI DIVERSE POSSONO ESSERE UGUALI SOLO SE L'ESPONENTE È 0

$$2\mathrm{x} - 1 = 0 \quad => \quad \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

<u>2 METODO</u>: OTTENERE A SINISTRA UN' ESPRESSIONE CON GLI ESPONENZIALI E A DESTRA 1.

$$3^{x} \cdot 4^{2x-1} = \frac{1}{3^{x-1}} \qquad \text{(m.c.m)}$$

$$3^{x} \cdot 3^{x-1} \cdot 4^{2x-1} = 1$$

$$(3 \cdot 4)^{2x-1} = (3 \cdot 4)^{0}$$

$$2x - 1 = 0 \quad => \quad \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

4) EQUAZIONI CHE SI RISOLVONO CON UN CAMBIAMENTO DI VARIABILE

<u>IL CAMBIAMENTO DI VARIABILE È CONSIGLIATO QUANDO COMPAIONO</u>:

- <u>ESPONENZIALI CON LA STESSA BASE MA CON ESPONENTI MULTIPLI TRA LORO</u>

$$4^{x} + 2^{x+2} - 12 = 0$$
$$2^{2x} + 2^{x} \cdot 2^{2} - 12 = 0$$

SI PONE $2^{x} = y$ ALLORA $2^{2x} = y^{2}$

$$y^2 + 4y - 12 = 0$$

$$(y + 6)(y - 2) = 0$$

$$y = 2 \;\; e \;\; y = -6$$

RICORDATI CHE, TROVATO IL VALORE DI y, DEVI TROVARE IL CORRISPONDENTE VALORE DI x PERCHÉ L'INCOGNITA INIZIALE DELL'EQUAZIONE ERA x

SE $y = 2$ ALLORA $2^x = 2$ QUINDI $x = 1$

SE $y = -6$ ALLORA $2^x = -6$ IMPOSSIBILE

- <u>ESPONENZIALI CON LA STESSA BASE MA ESPONENTI OPPOSTI</u>

$$3^{x-1} = 4 - 3^{2-x}$$

APPLICHIAMO LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE

$$3^x \cdot 3^{-1} = 4 - 3^2 \cdot 3^{-x}$$

SI PONE $3^x = y$ ALLORA $3^{-x} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

$$\frac{1}{3}y = 4 - \frac{9}{y}$$

$$y^2 - 12y + 27 = 0$$

$$(y - 9)(y - 3) = 0$$

$$y = 9 \;\; e \;\; y = 3$$

RICORDATI CHE, TROVATO IL VALORE DI Y, DEVI TROVARE IL CORRISPONDENTE VALORE DI X PERCHÉ L'INCOGNITA INIZIALE DELL'EQUAZIONE ERA X

SE $y = 9$ ALLORA $3^x = 9$ QUINDI $\boldsymbol{x = 2}$

SE $y = 3$ ALLORA $3^x = 3$ ALLORA $\boldsymbol{x = 1}$

- <u>ESPONENZIALI UGUALI CHE SI TROVANO SIA AL NUMERATORE CHE AL DENOMINATORE DI UNA FRAZIONE</u>

$$\frac{2 \cdot 4^x - 3}{2 \cdot 4^x + 4} = \frac{4^x}{4^x + 2} - \frac{1}{4^x}$$

SI PONE $4^x = y$

$$\frac{2y - 3}{2y + 4} = \frac{y}{y + 2} - \frac{1}{y}$$

$$\frac{2y - 3}{2(y + 2)} = \frac{y}{y + 2} - \frac{1}{y}$$

$$2y^2 - 3y = 2y^2 - 2y - 4$$

$$y = 4$$

RICORDATI CHE, TROVATO IL VALORE DI y, DEVI TROVARE IL CORRISPONDENTE VALORE DI x PERCHÉ L'INCOGNITA INIZIALE DELL'EQUAZIONE ERA x

SE $y = 4$ ALLORA $4^x = 4$ QUINDI

$$\boldsymbol{x = 1}$$

5) EQUAZIONI IN CUI SI HANNO BASI ED ESPONENTI DIVERSI

Per risolvere questo tipo di equazione bisogna far ricorso ai logaritmi (§ 2.5).

1.3 DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LORO RISOLUZIONE

Le disequazioni esponenziali hanno le stesse tecniche risolutive delle equazioni esponenziali (§ 1.2). Ovviamente al posto del simbolo " = " comparirà uno tra i seguenti simboli: " > " (maggiore), " < " (minore), "≥ " (maggiore o uguale), " ≤ " (minore o uguale).

Quando ci si riconduce ad una disequazione elementare e si deve passare agli esponenti è di fondamentale importanza la seguente regola: **se la base è maggiore di 1 allora si mantiene il verso della disequazione se la base è compresa tra 0 e 1 si deve cambiare il verso della disequazione.**

Tale regola è schematizzata nella seguente tabella:

$\boldsymbol{Disequazione\ elementare}$		$\boldsymbol{se\ \ a > 1}$	$\boldsymbol{se\ \ 0 < a < 1}$
$\boldsymbol{a^x > 0}$		$sempre$	$sempre$
$\boldsymbol{a^x < 0}$		mai	mai
$\boldsymbol{a^x > 1}$ $\boldsymbol{a^x \geq 1}$	$a^x > a^0$ $a^x \geq a^0$	$x > 0$ $x \geq 0$	$x < 0$ $x \leq 0$
$\boldsymbol{a^x < 1}$ $\boldsymbol{a^x \leq 1}$	$a^x < a^0$ $a^x \leq a^0$	$x < 0$ $x \leq 0$	$x > 0$ $x \geq 0$
$\boldsymbol{a^{f(x)} > a^{g(x)}}$ $\boldsymbol{a^{f(x)} \geq a^{g(x)}}$		$f(x) > g(x)$ $f(x) \geq g(x)$	$f(x) < g(x)$ $f(x) \leq g(x)$
$\boldsymbol{a^{f(x)} < a^{g(x)}}$ $\boldsymbol{a^{f(x)} \leq a^{g(x)}}$		$f(x) < g(x)$ $f(x) \leq g(x)$	$f(x) > g(x)$ $f(x) \geq g(x)$

2 I LOGARITMI

2.1 DEFINIZIONE

SIA a UN NUMERO REALE QUALSIASI CON a > 0 E $a \neq 1$, b UN NUMERO REALE QUALSIASI CON b > 0.
SI DEFINISCE **LOGARITMO IN BASE a DEL NUMERO b** L'ESPONENTE DA DARE AD a PER OTTENERE b.

$$\log_a b = x \qquad se\ e\ solo\ se \qquad a^x = b$$

NON ESISTE QUINDI IL LOGARITMO DI UN NUMERO NEGATIVO

a È DETTA **BASE**, b È DETTO **ARGOMENTO**

2.2 CONVENZIONI

Log indica il **logaritmo decimale** o in **base 10**
log oppure **ln** indica il **logaritmo naturale** o in **base e** dove **e** è il numero di Nepero ed e = 2,71828.....

2.3 PROPRIETÀ

$log_a 1 = 0$	$log_a a = 1$	$log_a a^n = n$
$a^{log_a b} = b$	$log_a(x \cdot y) = log_a x + log_a y$	$log_a \left(\frac{x}{y}\right) = log_a x - log_a y$
$log_a b^n = n \cdot log_a b$	$log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot log_a b$	$log_{\frac{1}{a}} b = -log_a b$

2.4 CAMBIAMENTO DI BASE

Dati a > 0, a ≠ 1, b > 0, c > 0, c ≠ 1,

$$log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$$

2.5 EQUAZIONI ESPONENZIALI RISOLVIBILI CON I LOGARITMI

I logaritmi permettono di risolvere le equazioni esponenziali i cui due membri sono prodotti o divisioni di basi diverse (§1.2 punto 5).

$$\boldsymbol{Se \quad f(x) = g(x) \qquad allora \quad log_a f(x) = log_a g(x)}$$

La scelta della base a è libera.

Se dovessero comparire operazioni di addizione e sottrazione non è possibile applicare subito i logaritmi e quindi si deve cercare, con opportuni calcoli algebrici, di trasformare l'equazione esponenziale in una equazione con soli prodotti e divisioni.

ESEMPIO 1:

$$2^{x+3} = 64 \cdot 3^{x-3}$$

IN QUESTA EQUAZIONE COMPAIONO GIÀ DEI PRODOTTI QUINDI È POSSIBILE "PASSARE" SUBITO AI LOGARITMI

$$Log\ 2^{x+3} = Log\ (64 \cdot 3^{x-3})$$

APPLICHIAMO LE PROPRIETÀ DEI LOGARITMI (§ 2.3):

$$(x+3)\ Log\ 2 = Log\ 2^6 + (x-3)\ Log\ 3$$

$$x\ Log\ 2 + 3\ Log\ 2 = 6\ Log\ 2 + x\ Log\ 3 - 3\ Log\ 3$$